

**ANÁLISIS DE SISTEMAS DE IDENTIFICACIÓN POR SUBESPACIOS
APLICADO A SISTEMAS MULTIVARIABLES**

CESAR AUGUSTO VALENCIA SERNA

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍAS-INGENIERÍA ELÉCTRICA
PEREIRA-RISARALDA**

2019

**ANÁLISIS DE SISTEMAS DE IDENTIFICACIÓN POR SUBESPACIOS
APLICADOS A SISTEMAS MULTIVARIABLES**

CESAR AUGUSTO VALENCIA SERNA

Trabajo de grado para optar al título de ingeniero electricista

**DIRECTOR
Ph.D. EDUARDO GIRALDO SUAREZ**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍAS- INGENIERÍA ELÉCTRICA
PEREIRA-RISARALDA**

2019

Dedicatoria

A mi familia en especial a mis padres y hermanos. A todos ellos que siempre me han apoyado de manera incondicional y me han motivado para alcanzar mis metas.

Agradecimientos

A mi padre, aunque no se encuentre en esta vida conmigo, lo amaré por siempre.

A mi familia y amigos que hicieron parte de mi proceso académico que siempre me brindaron apoyo y fortaleza emocional con el fin de cumplir mis sueños.

A mi director de proyecto de grado Eduardo Giraldo Suarez; por acompañarme en este proceso y por compartir sus valiosos conocimientos, mediante los cuales se hizo posible el desarrollo de este trabajo de grado.

Al profesor Angelo Antonio Marín, por el acompañamiento, tolerancia y tutorías para lograr el desarrollo de este trabajo.

Tabla de contenido

Índice de figuras	6
Índice de tablas	7
Resumen	8
Introducción	9
Capítulo 1	10
1. Descripción y modelo matemático del helicóptero 2DOF	10
1.1 Helicóptero de dos grados de libertad	10
1.2 Ecuaciones del sistema.....	11
1.3 Modelo no lineal	14
1.4 Modelo lineal	15
Capítulo 2	17
2. Métodos de identificación por subespacios	17
2.1 Estimación por subespacios.....	17
2.1.1 Método MOESP	17
2.1.2 Método ORT.....	18
2.2 Identificación por mínimos cuadrados fuera de línea.....	25
2.3 Identificación por mínimos cuadrados recursivos	26
Capítulo 3	27
3. Resultados y Análisis	27
3.1 Identificación del sistema utilizando el método MOESP	27
3.2 identificación del sistema utilizando el método ORT	32
3.3 Validación de resultados	35
Conclusiones	40
Apéndice A	41
Apéndice B.....	46
Bibliografía	49

Índice de figuras

Figura 1.0 Helicóptero de dos grados de libertad	11
Figura 3.0 Identificación por el método MOESP. a) Estimación salida Yaw. b) Estimación salida Pitch	29
Figura 3.1 Error de estimación usando el método MOESP	30
Figura 3.2 Comparación matriz de transferencia sistema original y sistema estimado usando MOESP. a) Sistema original. b) Sistema estimado	31
Figura 3.3 Identificación por el método ORT. a) Estimación salida Yaw. b) Estimación salida Pitch	32
Figura 3.4 Error de estimación usando el método ORT	33
Figura 3.5 Comparación matriz de transferencia sistema original y sistema estimado usando ORT. a) Sistema original. b) Sistema estimado	34
Figura 3.6 Identificación por mínimos cuadrados. a) Estimación salida Yaw. b) Estimación salida Pitch	35
Figura 3.7 Error de estimación usando el método de mínimos cuadrados	36
Figura 3.8 Comparación matriz de transferencia sistema original y sistema estimado usando mínimos cuadrados. a) Sistema original. b) Sistema estimado	37
Figura 3.9 Identificación basada en algoritmos genéticos. a) Estimación salida Pitch. b) Estimación salida Yaw	38
Figura 3.10 Identificación en línea basada en mínimos cuadrados. a) Estimación salida Pitch. b) Estimación salida Yaw	39

Índice de tablas

Tabla 1.0 Tabla de parámetros	28
-------------------------------------	----

RESUMEN

En el presente trabajo se describe el proceso de identificación por subespacios de un helicóptero de dos grados de libertad, el cual es diseñado mediante un modelo matemático lineal en espacio de estados en el ambiente de *Matlab*.

Inicialmente se realiza una identificación por subespacios utilizando el método MOESP, como paso siguiente se realiza la estimación de la planta multivariable a partir del método ORT, y de este modo se comparan las respuestas estimadas de las salidas del sistema entregadas por los métodos por subespacios utilizados con una identificación utilizando el método de mínimos cuadrados.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de técnicas utilizadas para el diseño de controladores se basan en la relación entre la planta y su entorno. Dado esto, realizar un control sobre la planta puede ser complejo si no se conoce la dinámica interna del sistema, lo que repercute a realizar un sistema de identificación. Estas técnicas de identificación entregan un modelo real variante en el tiempo de la planta de los parámetros internos desconocidos, a partir de valores de entrada y de salida. Encontrado un modelo que represente toda la dinámica de la planta se pueden diseñar unas ganancias de control que atiendan las necesidades de la misma. [1][2]

Los métodos de identificación por subespacio (SIMs) se han vuelto muy populares en los últimos años, utilizando como objetivo estimar las variables de estado o la matriz de observabilidad extendida directamente de los valores entregados por la planta. [3][4] buscando obtener las mejores ganancias posibles de las distintas técnicas del controlador para poder observar una respuesta eficiente del sistema, sin importar cambios de referencia y perturbaciones internas como externas. [5][6]

Lo que hace complejo el problema de controlar un sistema bajo identificación, es el tiempo necesario para encontrar un modelo dinámico que corresponda con un alto porcentaje al sistema real, por lo que se encuentran muchos métodos para la parte de estimación de sistemas multivariantes. [7]

Capítulo 1

Descripción y modelo matemático del helicóptero 2DOF

A continuación se presenta un modelo matemático de un helicóptero de dos grados de libertad (2DOF), en donde se muestran las ecuaciones que rigen el comportamiento de los diferentes elementos del sistema de forma no lineal y los cuales son linealizados para determinar un modelo bajo un rango de puntos de equilibrio.

1.1 Helicóptero de dos grados de libertad

Un helicóptero de dos grados de libertad es un mecanismo que consta de un cuerpo o estructura que está sujeta a una base central, sobre la cual se generan dos movimientos angulares, uno sobre el eje z llamado *yaw* " w " y el otro sobre el eje x llamado *pitch* " θ ". En cada extremo del cuerpo del helicóptero se encuentra un motor con una hélice acoplada, los cuales son los encargados de generar el empuje necesario para mover el sistema.

Estos mecanismos son de gran interés para los estudios de sistemas de identificación, debido a la gran influencia de los efectos aerodinámicos, al alto grado de interacción de sus variables y a sus características no lineales. Presentando así un reto para los ingenieros, los cuales deben diseñar técnicas de control adaptativas que permitan realizar seguimiento de referencias en estos sistemas.

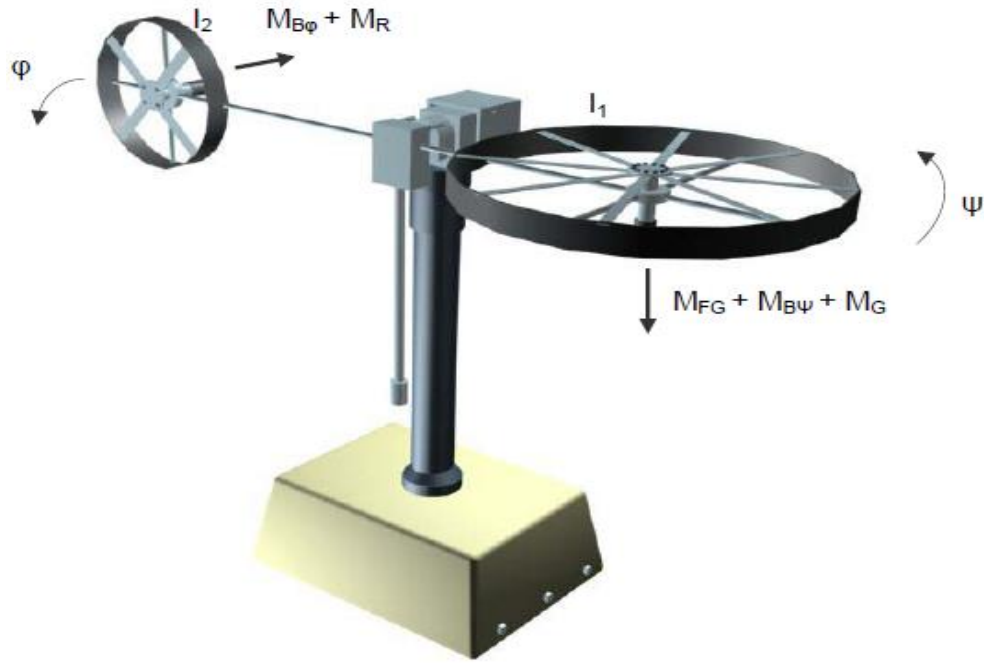


Figura 1.0 Helicóptero de dos grados de libertad. [8]

1.2 Ecuaciones del sistema

El modelo que se muestra a continuación es tomado del manual del helicóptero de dos grados de libertad distribuido por la empresa “feedback instruments limited” (ver figura 1.0). En este se describe el mecanismo mediante un sistema de ecuaciones no lineales, en las cuales se encuentran todas las características electromecánicas de la planta. [8]

Para el movimiento rotacional alrededor del eje z, se presenta la siguiente sumatoria de momentos.

$$I_1 * \ddot{\psi} = M_1 - M_{FG} - M_{BW} - M_G - M_{R1} \quad (1.0)$$

Donde I_1 corresponde al momento de inercia del rotor vertical. Los momentos que intervienen en la ecuación (1.0), se muestran a continuación.

- Características no lineales del motor 1 (M_1)

$$M_1 = a_1 * T_1^2 + b_1 * T_1 \quad (1.1)$$

Donde a_1 y b_1 son características estáticas del sistema y T_1 se expresa en la ecuación (1.6).

- Momento gravitacional (M_{FG})

$$M_{FG} = M_g * \sin w \quad (1.2)$$

Donde M_g es el momento de gravedad.

- Momento de las fuerzas de fricción (M_{BW})

$$M_{BW} = B_{1W} * \dot{W} + B_{2W} * \text{sign}(\dot{w}) \quad (1.3)$$

Donde B_{1w} y B_{2w} son parámetros función del momento de inercia.

- Momento de giro (M_G)

$$M_G = K_{gy} * M_1 * \dot{\theta} * \cos(w) \quad (1.4)$$

Donde K_{gy} es un parámetro de momento de giro

- Momento de reacción (M_{R1})

$$\dot{M}_{R1}(t) = -\frac{M_{R1}(t)}{T_{p1}} + \frac{k_{c1}}{T_{p1}} * T_2(t) + \frac{k_{c1} * T_{01}}{T_{p1}} * \dot{T}_2 \quad (1.5)$$

Donde T_{p1} y T_{01} son parámetros del momento de reacción y K_{c1} corresponde a la ganancia del momento de reacción, mientras que T_2 se expresa en la ecuación (1.11).

Las características del motor 1 son aproximadas mediante un modelo de primer orden representado por la ecuación (1.6).

$$\dot{T}_1 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * T_1(t) + \frac{k_1}{T_{11}} * u_1(t) \quad (1.6)$$

Donde T_{10} y T_{11} son parámetros denominadores del motor 1 y k_1 corresponde a la ganancia. Mientras que $u_1(t)$ es una entrada del sistema.

Para el movimiento rotacional alrededor del eje x, se presenta una ecuación de momentos similar a la anterior.

$$I_2 * \ddot{\theta} = M_2 - M_{B\theta} - M_{R2} \quad (1.7)$$

Donde I_2 es el momento inercial del rotor horizontal. Los momentos que intervienen en la ecuación (1.7) se muestran a continuación.

- Características no lineales del motor 2 (M_2)

$$M_2 = a_2 * T_2^2 + b_2 * T_2 \quad (1.8)$$

Donde a_2 y b_2 son características estáticas del sistema y T_2 se expresa en la ecuación (1.11).

- Momento de las fuerzas de fricción ($M_{B\theta}$)

$$M_{B\theta} = B_{1\theta} * \dot{w} + B_{2\theta} * \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (1.9)$$

Donde $B_{1\theta}$ y $B_{2\theta}$ son parámetros función del momento de inercia.

- Momento de reacción (M_{R2})

$$\dot{M}_{R2}(t) = -\frac{M_{R2}(t)}{T_{p2}} + \frac{k_{c2}}{T_{p2}} * T_1(t) + \frac{k_{c2} * T_{02}}{T_{p2}} * \dot{T}_1 \quad (1.10)$$

Donde T_{p2} y T_{02} son parámetros del momento de reacción y K_{c2} corresponde a la ganancia del momento de reacción, mientras que T_1 se expresa en la ecuación (1.6).

Características del motor 2, al igual que el motor 1 presenta un modelo aproximado de primer orden.

$$\dot{T}_2 = \frac{k_2}{T_{21}} * u_2(t) - \frac{T_{20}}{T_{21}} * T_2(t) \quad (1.11)$$

Donde T_{20} y T_{21} son parámetros denominadores del motor 2 y k_2 corresponde a la ganancia. Mientras que $u_2(t)$ es otra entrada del sistema.

1.3 Modelo no-lineal

A partir de las ecuaciones descritas anteriormente se plantea el modelo no lineal que describe el comportamiento y la dinámica del sistema.

Reemplazando las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) en la ecuación (1.0) se obtiene.

$$\ddot{w} = \frac{a_1 * T_1^2 + b_1 * T_1 - M_g * \sin w - B_{1w} * \dot{w} - B_{2w} * \text{sign}(\dot{w})}{I_1} - \frac{K_{gy} * a_1 * T_1^2 * \dot{\theta} * \cos w - K_{gy} * b_1 * T_1 * \dot{\theta} * \cos w - M_{R1}}{I_1} \quad (1.12)$$

Reemplazando la ecuación (1.11) en la ecuación (1.5)

$$\dot{M}_{R1} = -\frac{M_{R1}}{T_{p1}} + \left(\frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * T_2 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{02}}{T_{p1} * T_{21}} * u_2(t) \quad (1.13)$$

Reemplazando la ecuación (1.6) en la ecuación (1.10)

$$\dot{M}_{R2} = -\frac{M_{R2}}{T_{p2}} + \left(\frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * T_1 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{02}}{T_{p2} * T_{11}} * u_1(t) \quad (1.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.7) y (1.8) en la ecuación (1.6)

$$\ddot{\theta} = \frac{a_2 * T_2^2 + b_2 * T_2 - B_{1\theta} * \dot{w} - B_{2\theta} * \sin(\theta) - M_{R2}}{I_2} \quad (1.15)$$

Organizando el modelo mediante el uso de variables auxiliares se puede reescribir el comportamiento de la planta como una serie de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, que representan el modelo de estados.

$$\dot{x}_1 = \dot{w} \quad (1.16)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{a_1 * x_5^2 + b_1 * x_5 - M_g * \sin x_1 - B_{1w} * x_2 - B_{2w} * \text{sign}(x_2)}{I_1} - \frac{K_{gy} * a_1 * x_5^2 * x_4 * \cos x_1 - K_{gy} * b_1 * x_5 * x_4 * \cos x_1 - x_7}{I_1} \quad (1.17)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} \quad (1.18)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{a_1 * x_6^2 + b_2 * x_6 - B_{1\theta} * x_2 - B_{2\theta} * \text{sign}(x_4) - x_8}{I_2} \quad (1.19)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * x_5 + \frac{K_1}{T_{11}} * u_1 \quad (1.20)$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} * x_6 + \frac{K_2}{T_{21}} * u_2 \quad (1.21)$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{1}{T_{p1}} * x_7 + \left(\frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * x_6 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{01}}{T_{p1} * T_{21}} * u_2 \quad (1.22)$$

$$\dot{x}_8 = -\frac{1}{T_{p2}} * x_8 + \left(\frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * x_5 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{01}}{T_{p2} * T_{11}} * u_1 \quad (1.23)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 &= w & \dot{x}_1 &= \dot{w} = x_2 \\ \bullet \quad x_2 &= \dot{w} & \dot{x}_2 &= \ddot{w} \\ \bullet \quad x_3 &= \theta & \dot{x}_3 &= \dot{\theta} = x_4 \\ \bullet \quad x_4 &= \dot{\theta} & \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} \\ \bullet \quad x_5 &= T_1 & \dot{x}_5 &= \dot{T}_1 \\ \bullet \quad x_6 &= T_2 & \dot{x}_6 &= \dot{T}_2 \\ \bullet \quad x_7 &= M_{R1} & \dot{x}_7 &= \dot{M}_{R1} \\ \bullet \quad x_8 &= M_{R2} & \dot{x}_8 &= \dot{M}_{R2} \end{aligned}$$

1.4 Modelo lineal

Se linealizan las ecuaciones (1.16), (1.17), (1.18), (1.19), (1.20), (1.21), (1.22) y (1.23) alrededor del punto de operación cero, para obtener un sistema multivariable expresado mediante ecuaciones de estado lineales.

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \quad (1.24)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = \frac{b_1 * \Delta x_5 - B_{1w} * \Delta x_2 - M_g * \Delta x_1 - \Delta x_7}{I_1} \quad (1.25)$$

$$\Delta \dot{x}_3 = \Delta x_4 \quad (1.26)$$

$$\Delta \dot{x}_4 = \frac{-\Delta x_8 + b_2 * \Delta x_6 - B_{1\theta} * \Delta x_2}{I_2} \quad (1.27)$$

$$\Delta \dot{x}_5 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * \Delta x_5 + \frac{K_1}{T_{11}} * \Delta u_1 \quad (1.28)$$

$$\Delta \dot{x}_6 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} * \Delta x_6 + \frac{K_2}{T_{21}} * \Delta u_2 \quad (1.29)$$

$$\Delta \dot{x}_7 = \left(\frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * \Delta x_6 - \frac{1}{T_p} * \Delta x_7 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{02}}{T_{p1} * T_{21}} * \Delta u_2 \quad (1.30)$$

$$\Delta \dot{x}_8 = \left(\frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * \Delta x_5 - \frac{1}{T_{p2}} * \Delta x_7 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{02}}{T_{p2} * T_{11}} * \Delta u_1 \quad (1.31)$$

Capítulo 2

Métodos de identificación por subespacios

En este capítulo se concentra toda la contextualización para el diseño de los algoritmos de identificación que se usaron en el desarrollo del proyecto, y los controladores utilizados para la validación del sistema estimado. Los algoritmos son mostrados en el apéndice A.

2.1 Estimación por subespacios

El sistema lineal puede ser obtenido mediante la aplicación de un enfoque por subespacio como el método MOESP (Multivariable Output Error State Space) o el método ORT (Orthogonal Decomposition), al sistema alrededor de un punto de funcionamiento y teniendo un sistema discreto de la forma [9]:

$$x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (2.0)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] \quad (2.1)$$

Siendo $x \in R^{n \times 1}$, donde n es el número de variables de estado, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$, donde p es el numero de entradas, $u \in R^{p \times 1}$, y $C \in R^{m \times n}$, donde m es el número de salidas.

2.1.1 Método MOESP

En este método la proyección ortogonal es expresada como $E\{.|. \}$.

Se supone que los datos de las entras-salidas $\{u(t), y(t), t = 0, 1, \dots, N + 2k - 2\}$ están dados con N suficientemente grande y $k > n$. Basado en los datos de entradas-salidas [10], se define la matriz de entrada pasada a partir de los bloques de Hankel como:

$$U_{0|k-1} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(N-1) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2k-1) & u(2k) & \dots & u(N+2k-2) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Y se define una matriz de salida pasada a partir de los bloques de Hankel como:

$$Y_{0|k-1} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(N-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(2k-1) & y(2k) & \dots & y(N+2k-2) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Donde los índices 0 y $k-1$ denotan los argumentos de la parte superior izquierda y la parte inferior izquierda de la matriz Hankel y las columnas de la matriz de Hankel es usualmente fija como N .

Las matrices de datos rectangulares con un gran número de columnas se le aplica la descomposición LQ obteniendo el bloque inferior de matrices triangulares con un bloque cero en la esquina superior derecha. Por lo tanto la descomposición de una matriz de datos en LQ está dada por [10]:

$$\begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Donde $L_{11} \in R^{km \times km}$, $L_{21} \in R^{kp \times km}$, $L_{22} \in R^{kp \times kp}$ con L_{11} , L_{22} triangular inferior y $Q_1 \in R^{N \times km}$, $Q_2 \in R^{N \times kp}$ son ortogonales. Teniendo en cuenta el sistema descrito en (2.0) y (2.1) podemos observar que L_{11} es no singular, dado que $Q_1^T = L_{11}^{-1} U_{0|k-1}$. De modo que tenemos un conjunto de ecuaciones a partir de la descomposición LQ de la forma [10]:

$$U_{0|k-1} = L_{11} Q_1^T \quad (2.5)$$

$$Y_{0|k-1} = L_{21} L_{11}^{-1} U_{0|k-1} + L_{22} Q_2^T \quad (2.6)$$

La proyección ortogonal del espacio fila de $Y_{0|k-1}$ en el espacio fila de $U_{0|k-1}$ esta dado por

$$\hat{E}\{Y_{0|k-1} | U_{0|k-1}\} = L_{21} Q_1^T = L_{21} L_{11}^{-1} U_{0|k-1} \quad (2.7)$$

Además, la proyección ortogonal del espacio fila $Y_{0|k-1}$ en el complemento $U_{0|k-1}^\perp$ del espacio fila de $U_{0|k-1}$ esta dado por:

$$\hat{E}\{Y_{0|k-1}|U_{0|k-1}^\perp\} = L_{22}Q_2^T \quad (2.8)$$

En resumen el lado derecho de $Y_{0|k-1}$ en (2.6) es la descomposición de la suma ortogonal de la matriz de salida $Y_{0|k-1}$ en el espacio fila de la matriz de entrada $U_{0|k-1}$ y su complemento.

Teniendo la matriz de observabilidad extendida del sistema representado en las ecuaciones (2.0) y (2.1), y definida como:

$$\vartheta_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Se tiene una representación fundamental en la identificación subespacial, descrita por:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D & & \\ CB & & \\ & \ddots & \\ CA^{k-2}B & \dots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+k-1) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Teniendo el bloque de la matriz de Toeplitz

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} D & & \\ CB & & \\ & \ddots & \\ CA^{k-2}B & \dots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & & \\ \ddots & \ddots & \\ CB & D & \end{bmatrix} \in R^{kp \times km}$$

Entonces se tiene

$$y_k(t) = \vartheta_k x(t) + \Psi_k u_k(t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Se tiene que los términos $u_k(t)$ y $y_k(t)$, el bloque de matriz de Hankel $U_{0|k-1}$ y $Y_{0|k-1}$ por lo que la ecuación (2.11) se puede expresar como:

$$Y_{0|k-1} = \vartheta_k X_0 + \Psi_k U_{0|k-1} \quad (2.12)$$

Donde $X_0 = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)] \in R^{n \times N}$ y es la matriz de estados iniciales.

Se desprende de (2.12) y (2.6) que

$$\vartheta_k X_0 + \Psi_k L_{11} Q_1^T = L_{21} Q_1^T + L_{22} Q_2^T \quad (2.13)$$

Donde debe tenerse en cuenta que aunque el lado derecho es una suma ortogonal, el lado izquierdo es una suma directa, de modo que dos cantidades en el mismo no son necesariamente ortogonales. Esto implica que $\vartheta_k X_0 \neq L_{22} Q_2^T$ y $\Psi_k L_{11} Q_1^T \neq L_{21} Q_1^T$.

Multiplicando (2.13) por Q_2 se tiene

$$\vartheta_k X_0 Q_2 = L_{22} \quad (2.14)$$

Donde $Q_1^T Q_2 = 0$, $Q_2^T Q_2 = I_{kp}$ son usados.

A continuación supondremos unas diferentes condiciones para un sistema en espacio de estados.

A1) $Rango(X_0) = n$.

A2) $Rango(U_{0|k-1}) = km$, donde $k > n$.

A3) $Span(X_0) \cap Span(U_{0|k-1}) = \{0\}$, donde $Span\{\cdot\}$ denota el espacio abarcado por los vectores fila de una matriz.

Lemma 2.0 Se supone que A1) hasta A3) y el $Rango(\vartheta_k) = n$ satisfacen.

Entonces se cumple la siguiente condición del rango [10]:

$$Rango \begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \end{bmatrix} = km + n \quad (2.15)$$

Prueba. De (2.12) se deduce que

$$\begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{km} & 0_{km \times n} \\ \Psi_k & \vartheta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ X_0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Donde $k > n$.

El Lemma 2.0 implica que el sistemas representado por (2.0) y (2.1), si se eliminan los vectores fila en $Y_{0|k-1}$ que son dependientes de los vectores fila en $U_{0|k-1}$, quedan exactamente n vectores fila independientes en $Y_{0|k-1}$, donde n es la dimensión del espacio de estados. En lo siguiente, la matriz [10]:

$$W_{0|k-1} := \begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \end{bmatrix}, \quad k > n$$

Haciendo uso del Lemma 2.0, el producto $X_0 Q_2$ tiene rango de fila completo n y $Rango(\vartheta_k) = n$, que es igual a $Rango(L_{22})$. Así podemos obtener la imagen de la matriz de observabilidad extendida ϑ_k por lo tanto la dimensión n de la SVD de L_{22} , el SVD de L_{22} está dado por [10]:

$$L_{22} = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T \quad (2.17)$$

Donde $U_1 \in R^{kp \times n}$ y $U_2 \in R^{kp \times (kp-n)}$, entonces se tiene que:

$$\vartheta_k X_0 Q_2 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

Para que definamos la matriz de observabilidad extendida como

$$\vartheta_k = U_1 \Sigma_1^{1/2} \quad (2.18)$$

Y $n = \dim \Sigma_1$. La matriz C es dada por

$$C = \vartheta_k(1:p, 1:n) \quad (2.19)$$

Y la matriz A es obtenida resolviendo la ecuación lineal

$$\vartheta_k(1:p(k-1), 1:n)A = \vartheta_k(p+1:kp, 1:n) \quad (2.20)$$

Ahora consideramos la estimación de matrices B y D. Desde $U_2^T L_{22} = 0$ y $U_2^T \vartheta_k = 0$, multiplicando (2.13) por U_2^T se tiene

$$U_2^T \Psi_k L_{11} Q_1^T = U_2^T L_{21} Q_1^T \quad (2.21)$$

Después multiplicando (2.21) por Q_1 tenemos

$$U_2^T \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & \dots & D \end{bmatrix} = U_2^T L_{21} L_{11}^{-1} \quad (2.22)$$

Esta es una ecuación lineal con respecto a B y D, se usa el método de mínimos cuadrados para encontrarlos. Definidos

$$U_2^T := [\iota_1 \ \iota_2 \ \dots \ \iota_k], \quad U_2^T L_{21} L_{11}^{-1} := [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_k]$$

Donde $\iota_i \in R^{(kp-n) \times p}$, $i = 1, \dots, k$ y $M_i \in R^{(kp-n) \times m}$ de (2.22).

$$\iota_1 D + \iota_2 CB + \dots + \iota_{k-1} CA^{k-3}B + \iota_k CA^{k-2}B = M_1$$

$$\iota_2 D + \iota_3 CB + \dots + \iota_k CA^{k-3}B = M_2$$

\vdots

$$\iota_{k-1} D + \iota_k CB = M_{k-1}$$

$$\iota_k D = M_k$$

Definiendo $\bar{\iota}_i = [\iota_i \dots \iota_k] \in R^{(kp-n) \times (k+1-i)p}$, $i = 2, \dots, k$, obteniendo las siguientes ecuaciones lineales sobredeterminadas:

$$\begin{bmatrix} \iota_1 & \bar{\iota}_2 \vartheta_{k-1} \\ \iota_2 & \bar{\iota}_3 \vartheta_{k-2} \\ \vdots & \vdots \\ \iota_{k-1} & \bar{\iota}_k \vartheta_1 \\ \iota_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{k-1} \\ M_k \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.1.2 Método ORT

Al igual que en el método anterior se supone que los datos de las entradas-salidas $\{u(t), y(t), t = 0, 1, \dots, N + 2k - 2\}$ están dados con N suficientemente grande y $k > n$. Y se define una matriz de bloque de Hankel como (2.2) y (2.3), pero además se deben definir dos matrices más de entrada y salida futura. [10]

$$U_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \dots & u(k+N-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \dots & u(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2k-1) & u(2k) & \dots & u(N+2k-2) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Similarmente, se define $Y_{k|2k-1}$ y también

$$U_{0|2k-1} = \begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ U_{k|2k-1} \end{bmatrix}, \quad Y_{0|2k-1} = \begin{bmatrix} Y_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix}$$

Se define un subsistema determinista

$$\hat{y}_d(t) := \hat{E}\{y_d(t)|u_{[0,T]}\} = \hat{E}\{y(t)|u_{[0,T]}\}$$

Entonces la salida proyectada $\hat{y}_d(t)$ es descrita por el modelo de espacio de estados

$$\hat{x}_d(t+1) = A_d \hat{x}_d(t) + B_d u(t) \quad (2.25)$$

$$\hat{y}_d(t) = C_d \hat{x}_d(t) + D_d u(t) \quad (2.26)$$

$$\hat{x}_d(0) = \hat{E}\{x_d(0)|u_{[0,T]}\} \quad (2.27)$$

Donde $\hat{x}_d(t) := \hat{E}\{x_d(t)|u_{[0,T]}\}$.

Se define la matriz extendida de observabilidad mostrada en (2.9) con las matrices del sistema presentado en (2.25), (2.26) y (2.27), además se muestra la matriz triangular inferior Toeplitz como [10]:

$$\Psi_k(D_d, B_d) = \begin{bmatrix} D_d & & & \\ C_d B_d & & & \\ & \ddots & & \\ C_d A_d^{k-2} B_d & \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_d & & \\ \ddots & \ddots & \\ C_d B_d & D_d & \end{bmatrix} \in R^{kp \times km}$$

Se obtiene una ecuación matricial de entrada salida

$$\hat{Y}_{k|2k-1}^d = \vartheta_k \hat{X}_k^d + \Psi_k U_{k|2k-1} \quad (2.28)$$

Donde $\hat{Y}_{k|2k-1}^d$ es el bloque de la matriz de Hankel generada por \hat{y}_d y \hat{X}_k^d definido como

$$\hat{X}_k^d = [\hat{x}_d(k) \ \hat{x}_d(k+1) \ \dots \ \hat{x}_d(k+N-1)]$$

Realizando la descomposición LQ, tenemos:

$$\begin{bmatrix} U_{0|2k-1} \\ Y_{0|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1^T \\ \bar{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Donde $R_{11} \in R^{2km \times 2km}$, $R_{22} \in R^{2kp \times 2kp}$ con R_{11} , R_{22} triangular inferior y $\bar{Q}_1 \in R^{N \times 2km}$, $\bar{Q}_2 \in R^{N \times 2kp}$ son ortogonales. R_{11} es no singular, por lo tanto

$$Y_{0|2k-1} = R_{21} \bar{Q}_1^T + R_{22} \bar{Q}_2^T = R_{21} R_{11}^{-1} U_{0|2k-1} + R_{22} \bar{Q}_2^T \quad (2.30)$$

Donde se observa que $R_{21} \bar{Q}_1^T$ pertenece al espacio fila de $U_{0|2k-1}$, y $R_{22} \bar{Q}_2^T$ es ortogonal a $\bar{Q}_1^T \bar{Q}_2 = 0$. Por lo tanto, $R_{21} \bar{Q}_1^T$ es la proyección ortogonal de $Y_{0|2k-1}$ en el espacio fila $U_{0|2k-1}$. Así, el componente determinista esta dado por

$$\hat{Y}_{0|2k-1}^d = R_{21} \bar{Q}_1^T = R_{21} R_{11}^{-1} U_{0|2k-1} \quad (2.31)$$

Y por lo tanto el componente estocástico es

$$\hat{Y}_{0|2k-1}^s := Y_{0|2k-1} - \hat{Y}_{0|2k-1}^d = R_{22} \bar{Q}_2^T \quad (2.32)$$

Teniendo en cuenta los hechos anteriores, consideramos una descomposición de LQ relacionada

$$\begin{bmatrix} U_{k|2k-1} \\ U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Donde $L_{11}, L_{22} \in R^{km \times km}$, $L_{33}, L_{44} \in R^{kp \times kp}$ son matrices triangulares inferiores, y $Q_1, Q_2 \in R^{N \times km}$, $Q_3, Q_4 \in R^{N \times kp}$ son matrices ortogonales. Teniendo en cuenta (2.31) y (2.33) el componente determinista está dado por

$$\hat{Y}_{k|2k-1}^d = L_{41}Q_1^T + L_{42}Q_2^T$$

Por otro lado, desde (2.28) y (2.33) tenemos

$$\Psi_k L_{11} Q_1^T + \vartheta_k \hat{X}_k^d = L_{41} Q_1^T + L_{42} Q_2^T \quad (2.34)$$

Multiplicando (2.34) por Q_2 , tenemos $\vartheta_k \hat{X}_k^d Q_2 = L_{42}$. Se tiene que $\hat{X}_k^d Q_2$ tiene rango completo.

$$Im(\vartheta_k) = Im(L_{42}) \quad (2.35)$$

Del mismo modo, multiplicamos (2.34) por una matriz $(\vartheta_k^\perp)^T$ satisfaciendo $(\vartheta_k^\perp)^T \vartheta_k = 0$, y multiplicando por Q_1 tenemos

$$(\vartheta_k^\perp)^T L_{41} = (\vartheta_k^\perp)^T \Psi_k (D_d, B_d) L_{11} \quad (2.36)$$

Haciendo uso de (2.35) y (2.36) podemos derivar un método subespacial de identificación del subsistema determinista. A continuación, asumimos que la descomposición LQ (2.33) está dado

Se realiza SVD de L_{42}

$$G = \begin{bmatrix} \hat{U} & \bar{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \bar{V} \end{bmatrix} \cong \hat{U} \hat{S} \hat{V}^T \quad (2.37)$$

Para calcular las estimaciones de las matrices A_d y C_d , donde la matriz de observabilidad extendida es $\vartheta_k = \hat{U} \hat{S}^{1/2}$

$$A_d = \vartheta_{k-1}^+ \bar{\vartheta}_k, \quad C_d = \vartheta_k(1:p, :) \quad (2.38)$$

Donde $\bar{\vartheta}_k$ denota la matriz obtenida al eliminar la primera p filas de ϑ_k .

Para calcular las estimaciones de B_d y D_d

$$\bar{U}^T L_{41} L_{11}^{-1} = \bar{U}^T \Psi_k(D_d, B_d) \quad (2.39)$$

2.2 Identificación por mínimos cuadrados fuera de línea

En este método de estimación se toman los valores de las entradas y salidas actuales y anteriores para así ser consignados en matrices, y poder ajustar el modelo estimado haciendo uso de estas. [12]

Suponga una función de transferencia de n orden de la forma:

$$y(k) = \frac{\beta_0 q^{-1} + \beta_1 q^{-2} + \dots + \beta_{n-1} q^{-n}}{1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2} + \dots + \alpha_n q^{-n}} u(k) \quad (2.40)$$

La cual es expresada como una ecuación en diferencias:

$$y(k) = -\alpha_1 y(k-1) - \dots - \alpha_n y(k-n) + \beta_0 u(k-1) + \dots + \beta_{n-1} u(k-n) \quad (2.41)$$

Expresando la ecuación (2.41) en forma vectorial se obtiene:

$$y(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La ecuación (2.43) muestra el sistema (2.42) de manera simplificada.

$$b = AX \quad (2.43)$$

Donde los valores de A y b son datos medidos experimentalmente al aplicar diferentes referencias sobre el sistema y observar las diferentes respuestas de la planta, mientras que X corresponde a los parámetros desconocidos del sistema.

Haciendo uso del método de mínimos cuadrados se puede despejar X como se muestra en la ecuación (2.44).

$$A^T b = A^T AX$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.44)$$

Una vez obtenidos los valores de X , se procede a reconstruir la función de transferencia (2.40).

2.3 Identificación por mínimos cuadrados recursivos

En este método de identificación, la estimación de los parámetros se realiza con las medidas obtenidas de entradas y salidas durante cada instante de tiempo dependiente del tiempo de muestreo. [13]

El algoritmo de mínimos cuadrados recursivos depende de los valores anteriores de la variable $\hat{\theta}$, y tiene la forma:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1)\varphi(k-1)}{1+\varphi^T(k-1)P(k-1)\varphi(k-1)}(y(k) - \varphi^T(k-1)\hat{\theta}(k-1)) \quad (2.45)$$

Donde φ y $\hat{\theta}$ corresponden a los vectores A y X de la ecuación (2.43) respectivamente. Mientras que P es la matriz de covarianza que está determinada por:

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k-1)\varphi^T(k-1)P(k-1)}{1+\varphi^T(k-1)P(k-1)\varphi(k-1)} \quad (2.46)$$

Donde $P(k-1)$ inicialmente es una matriz diagonal semipositiva definida, y la rapidez en que el método converge depende de los valores altos en que sea inicializada.

Capítulo 3

Resultados y Análisis

En esta sección se muestran los resultados de la identificación por subespacios aplicada al sistema multivariable del helicóptero de dos grados de libertad, para así diseñar un sistema de control en espacio de estados sobre el sistema estimado. Por último se comparan los métodos de estimación por subespacios con el método de identificación por mínimos cuadrados. En el apéndice A se pueden observar los códigos.

3.1 Identificación del sistema utilizando el método MOESP

Los valores de los parámetros del sistema descrito en el capítulo 1 se encuentran en la tabla 1.0 tomada del manual del TRMS. [8]

Parámetro	Valor
I_1 – Momento de inercia del rotor vertical	$6.8 \cdot 10^{-2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
I_2 – Momento de inercia del rotor horizontal	$2 \cdot 10^{-2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
a_1 – Característica estática	0.0135
b_1 – Característica estática	0.0924
a_2 – Característica estática	0.02
b_2 – Característica estática	0.09
M_g – Momento de gravedad	0.32 N*m
$B_{1\psi}$ – Parámetro función del momento de inercia	$6 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$
$B_{2\psi}$ – Parámetro función del momento de inercia	$1 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$
$B_{1\theta}$ – Parámetro función del momento de inercia	$1 \cdot 10^{-1} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$
$B_{2\theta}$ – Parámetro función del momento de inercia	$1 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$
K_g – Parámetro de momento giroscópico	0.05 s/rad
K_1 – Ganancia motor 1	1.1
K_2 – Ganancia motor 2	0.8
T_{11} – Parámetro denominador del motor 1	1.1

T_{10} – Parámetro denominador del motor 1	1
T_{21} – Parámetro denominador del motor 2	1
T_{20} – Parámetro denominador del motor 2	1
T_{p1} – parámetro de momento de reacción	2
T_{p2} – parámetro de momento de reacción	2
T_{01} – parámetro de momento de reacción	3.5
T_{02} – parámetro de momento de reacción	3.5
K_{c1} – Ganancia de momento de reacción	-0.2
K_{c2} – Ganancia de momento de reacción	-0.2

Tabla 1.0 Tabla de parámetros. [8]

Reemplazando los valores de la tabla 1.0 en las ecuaciones lineales (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), (1.28), (1.29), (1.30) y (1.31) se obtiene el modelo en espacio de estados lineal en tiempo continuo de la planta multivariable como se describe a continuación.

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \quad (3.0)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -4.7059\Delta x_1 - 0.0882\Delta x_2 + 1.3588\Delta x_5 - 14.705\Delta x_7 \quad (3.1)$$

$$\Delta \dot{x}_3 = \Delta x_4 \quad (3.2)$$

$$\Delta \dot{x}_4 = -5\Delta x_2 + 4.5\Delta x_6 - 50\Delta x_8 \quad (3.3)$$

$$\Delta \dot{x}_5 = -0.9090\Delta x_5 + \Delta u_1 \quad (3.4)$$

$$\Delta \dot{x}_6 = -\Delta x_6 + 0.8\Delta u_2 \quad (3.5)$$

$$\Delta \dot{x}_7 = 0.25\Delta x_6 - 0.5\Delta x_7 - 0.28\Delta u_2 \quad (3.6)$$

$$\Delta \dot{x}_8 = 0.2181\Delta x_5 - 0.5\Delta x_8 - 0.35\Delta u_1 \quad (3.7)$$

Se discretiza el sistema utilizando un tiempo de muestreo de 100 [ms], para así obtener el vector de regresión de las salidas del sistema real y se aplican dos señales de entradas aleatorias. En la figura 3.0, se observa el comportamiento de las salidas estimadas con respecto a las salidas reales utilizando el método MOESP.

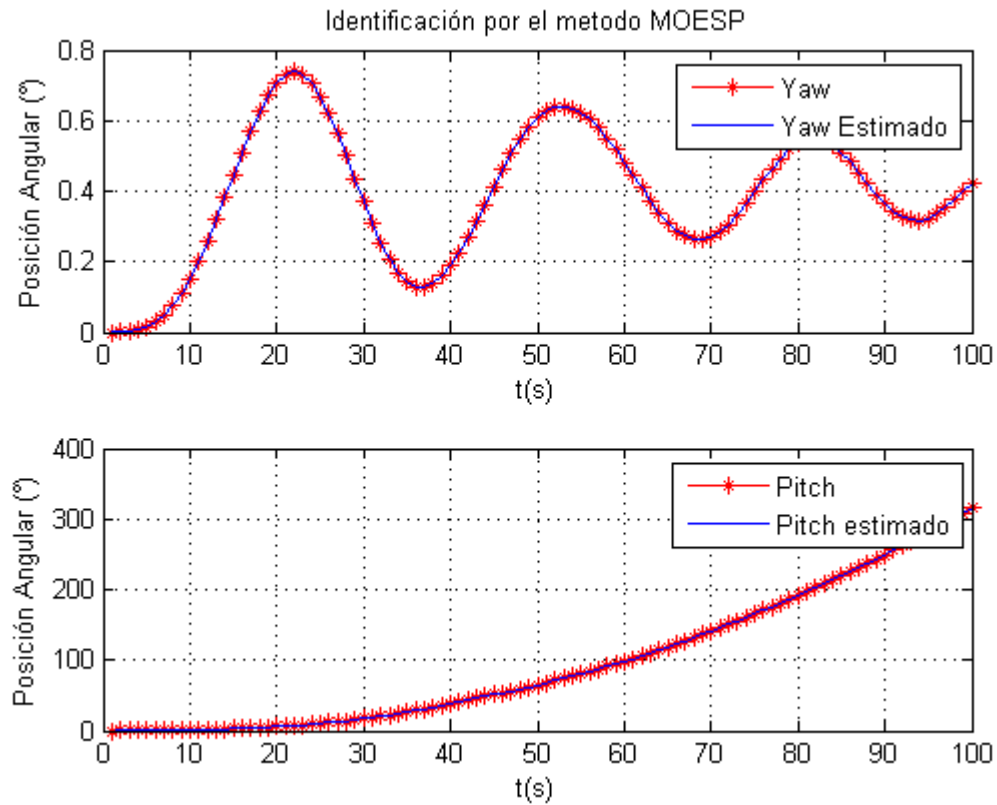


Figura 3.0 Identificación por el método MOESP. a) Estimación salida Yaw. b) Estimación salida Pitch. Fuente: Autor.

De la figura 3.0 se puede observar que el método MOESP utilizado para estimar las salidas del sistema logra cumplir con el objetivo planteado, dado que en ambas graficas las salidas estimadas se encuentran sobre puestas sobre las salidas reales de la planta sin importar si el comportamiento de las salidas reales poseen oscilaciones o directamente tiene un comportamiento exponencial hacia infinito.

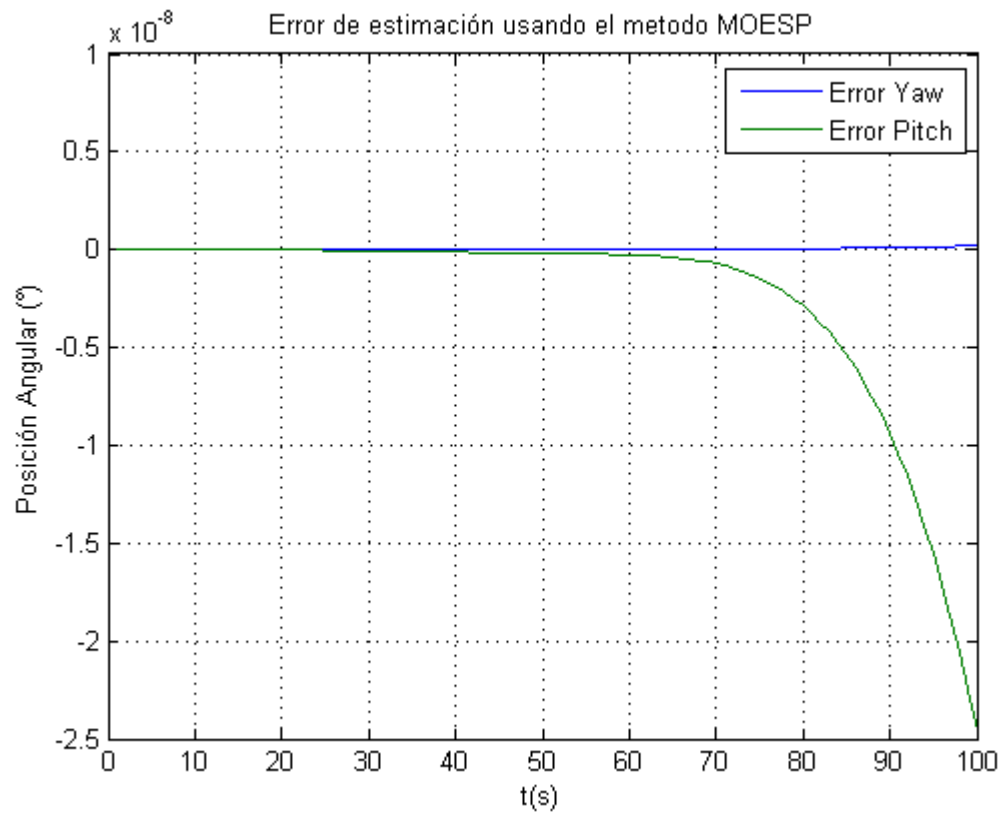


Figura 3.1 Error de estimación usando el método MOESP. Fuente: Autor.

La figura 3.1 nos presenta los errores obtenidos a la hora de estimar las salidas del sistema, logrando así representar gráficamente unos errores de estimación muy pequeños mediante los cuales podemos decir que el sistema identificado representa la dinámica de la planta multivariable.

A continuación se muestran los valores encontrados mediante este método de las matrices A, B, C y D para formar el sistema como en (2.0) y (2.1):

$$A = \begin{bmatrix} 1.0511 & -0.078 & -0.002 & -0.003 & -0.002 & 0.0013 & -0.0003 & 0.000 \\ 0.0319 & 1.0398 & -0.033 & 0.0685 & 0.0737 & -0.009 & 0.00110 & 0.0001 \\ 0.0151 & 0.1211 & 1.0077 & 0.2716 & -0.013 & -0.012 & 0.0007 & 0.0011 \\ -0.016 & -0.006 & -0.146 & 0.9491 & -0.159 & -0.066 & 0.0024 & 0.0012 \\ -0.008 & -0.039 & 0.0274 & 0.0932 & 0.8043 & -0.017 & 0.0144 & -0.004 \\ 0.0024 & -0.007 & -0.029 & 0.0145 & -0.036 & 0.8651 & -0.058 & -0.033 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0.0016 & -0.0002 & -0.010 & 0.0202 & 0.9807 & 0.0055 \\ -0.0001 & -0.0005 & -0.001 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0200 & -0.0002 & 0.9673 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.033 & 0.0010 \\ 0.1028 & -0.005 \\ 0.0206 & -0.092 \\ -0.048 & -0.077 \\ 0.1527 & 0.0049 \\ -0.183 & 0.2242 \\ -0.009 & 0.0197 \\ -0.024 & 0.0296 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.012 & 0.3484 & -0.228 & 0.3835 & -0.022 & 0.0493 & 0.0017 & 0.0008 \\ -4.459 & -1.592 & -0.153 & 0.2352 & 0.2210 & 0.0002 & -0.002 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de estas matrices realizaremos una comparación entre la representación por matriz de transferencia para poder observar el comportamiento de todo el sistema MIMO estimado.

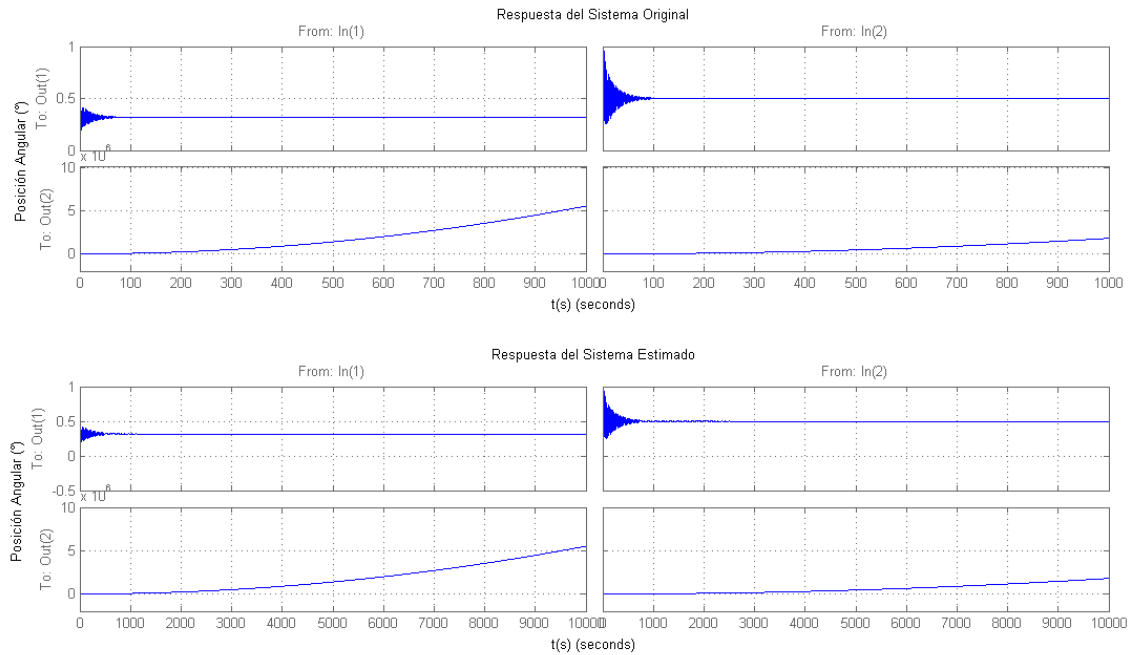


Figura 3.2 Comparación matriz de transferencia sistema original y sistema estimado usando MOESP. a) Sistema original. b) Sistema estimado. Fuente: Autor.

De la figura 3.2 observamos la comparación del sistema estimado con el sistema real, se debe decir que las gráficas muestran las funciones de transferencia correspondientes a cada una de las entradas del sistema multivariable que conforman cada una de las salidas del helicóptero 2DOF. En cada subplot de la

figura 3.2 las dos graficas superiores son la respuesta de la salida angular Yaw y las graficas inferiores son la respuesta de la salida angular Pitch, nuevamente podemos decir que el método de identificación utilizado en esta subsección logra encontrar un modelo bastante idéntico al sistema real, y por lo tanto los acoples internos que se muestran del sistema multivariable se pueden reducir de tal forma que la respuesta ante un referencia deseada con un posible controlador diseñado sea bastante rápida y sin oscilaciones alrededor de la salida deseada.

3.2 Identificación del sistema utilizando el método ORT

Utilizando el modelo en espacio de estados lineal de la planta multivariable presentado en las ecuaciones (3.0), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7), para ser discretizado nuevamente mediante un tiempo de 100 [ms] y aplicar unas entradas aleatorias al sistema multivariable real, obtenemos una estimación del sistema como se presenta en la figura 3.3.

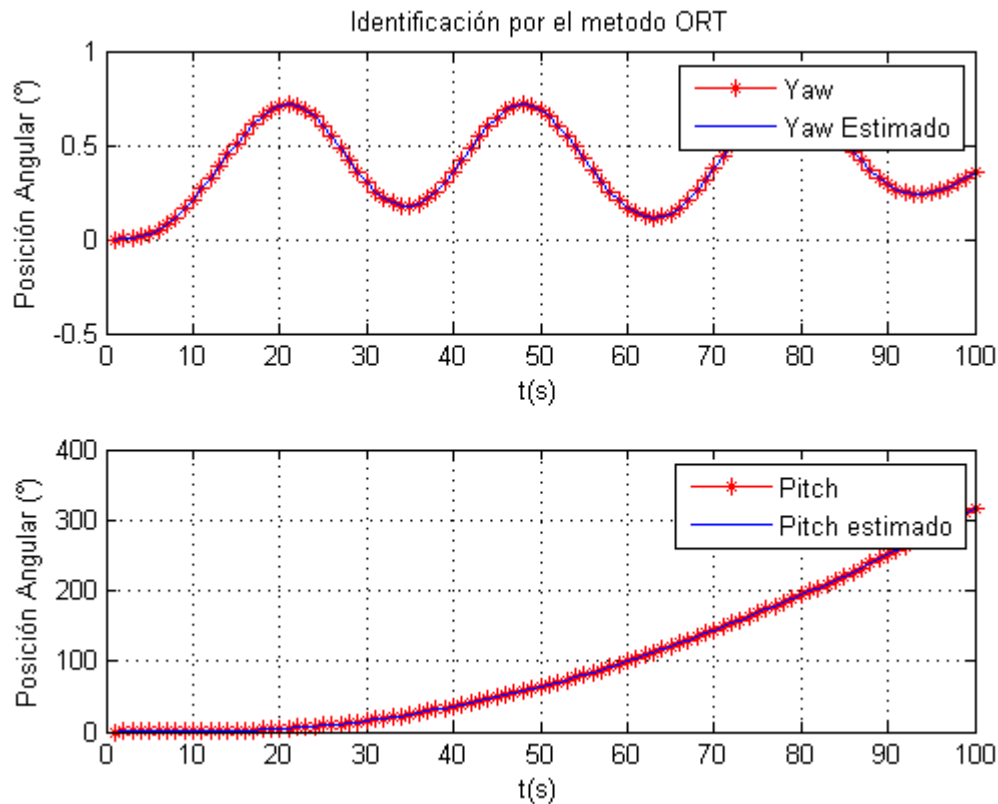


Figura 3.3 Identificación por el método ORT. a) Estimación salida Yaw. b) Estimación salida Pitch. Fuente: Autor.

De la figura 3.3, podemos observar que el método de estimación logra identificar las salidas reales de la planta al igual que el método mostrado en la subsección anterior.

Se visualiza tanto para la salida Yaw como para la salida Pitch una estimación muy cercana por lo que en las gráficas se encuentran sobre puestas la salida estimada con la salida real.

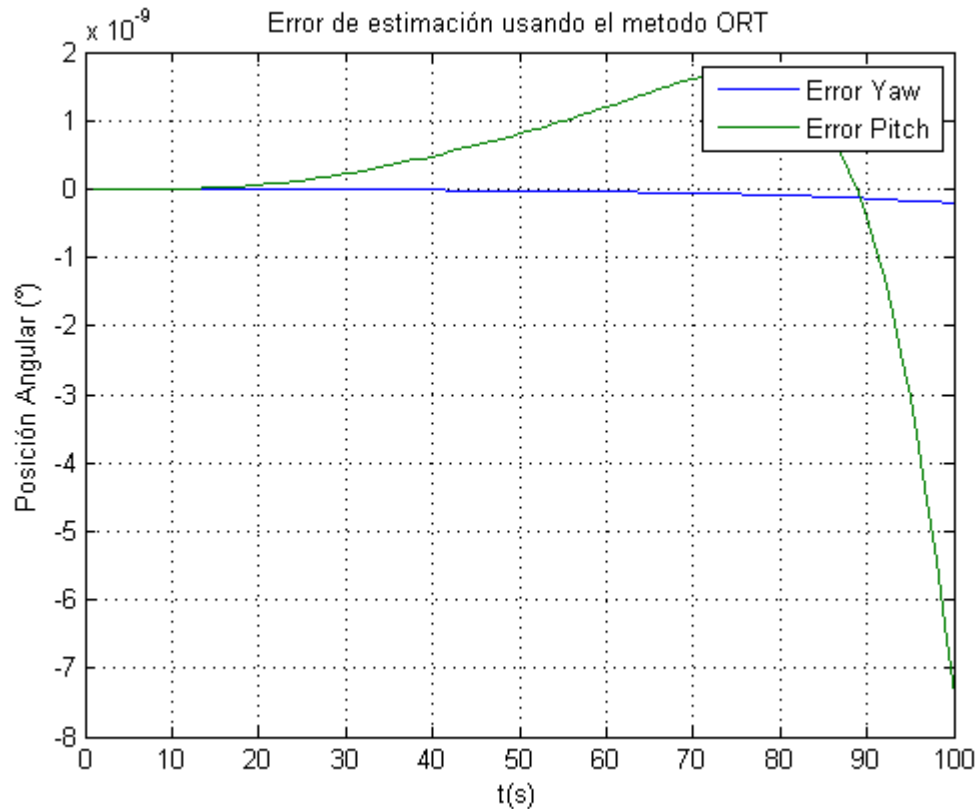


Figura 3.4 Error de estimación usando el método ORT. Fuente: Autor.

De la figura 3.4, se muestra el error de estimación para ambas salidas utilizando el método ORT donde gráficamente se puede concluir que el error de estimación en ambos casos de identificación es demasiado pequeño, por lo que el modelo encontrado representa la dinámica de la planta multivariable. En comparación de los métodos de estimación por subespacios se puede decir que para este problema en específico funciona mejor el método ORT dado que presenta errores de estimación menores que los presentados por el método MOESP en la figura 3.1.

Mediante este método encontramos las matrices A_d , B_d , C_d y D_d para formar el sistema presentado en (2.25) y (2.26).

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.0340 & 0.0783 & -0.008 & -0.002 & 0.0008 & 0.0012 & 0.0003 & 0.000 \\ -0.020 & 0.9951 & -0.148 & 0.0180 & 0.0580 & 0.0095 & 0.0011 & -0.0004 \\ 0.0005 & 0.0924 & 0.8992 & 0.0977 & 0.0834 & -0.052 & -0.003 & 0.0009 \\ 0.0041 & -0.014 & -0.229 & 1.0839 & -0.176 & 0.0269 & -0.001 & -0.002 \\ 0.0090 & -0.003 & -0.057 & 0.0965 & 0.8373 & -0.005 & 0.0250 & 0.0025 \\ 0.0011 & 0.0034 & 0.0579 & -0.031 & 0.0410 & 0.8689 & 0.0353 & -0.045 \\ -0.0002 & 0.0003 & 0.0061 & -0.0002 & -0.007 & -0.009 & 0.9733 & -0.004 \\ 0.0001 & 0.0003 & 0.0022 & -0.001 & -0.003 & 0.0355 & -0.008 & 0.9732 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0295 & -0.0009 \\ 0.0941 & -0.012 \\ -0.034 & 0.0252 \\ -0.099 & -0.129 \\ 0.1336 & 0.0209 \\ 0.2230 & -0.170 \\ -0.002 & 0.0143 \\ 0.0333 & -0.048 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -0.022 & -0.059 & -0.570 & -0.045 & -0.038 & -0.054 & 0.0012 & -0.001 \\ 5.2817 & -1.940 & -0.320 & 0.1156 & 0.2198 & 0.0028 & -0.003 & -0.0001 \end{bmatrix}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando este modelo en espacio de estados estimado, encontramos la matriz de transferencia que corresponde al modelo del helicóptero 2DOF encontrado.

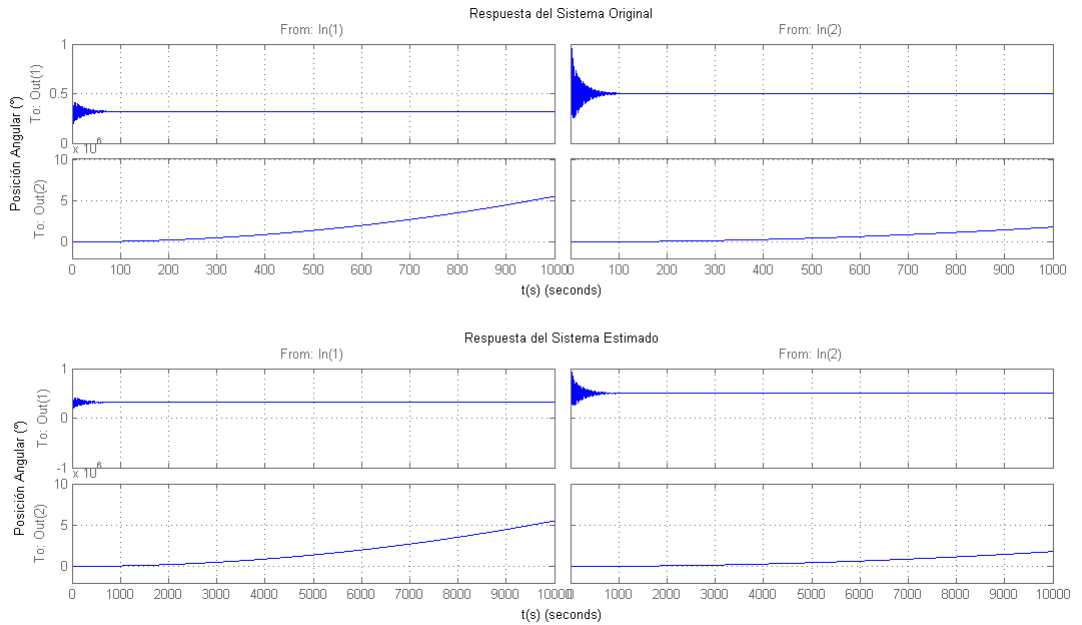


Figura 3.5 Comparación matriz de transferencia sistema original y sistema estimado usando ORT. a) Sistema original. b) Sistema estimado. Fuente: Autor.

De la figura 3.5 vemos la comparación del sistema estimado con el sistema real utilizando la representación de matriz de transferencia, se debe decir que la representación gráfica del helicóptero 2DOF es la misma utilizada en la figura 3.2 para obtener cada una de las salidas angulares. Por último, se muestra que este método de estimación al igual que el método de la subsección anterior logra estimar de buena manera la dinámica de la planta multivariable obteniendo así un modelo matemático que representa de forma eficiente el sistema MIMO.

3.3 Validación de resultados

Para comparar los métodos de identificación por subespacios implementados con otro método diferente de identificación se utilizó el método de mínimos cuadrados recursivos, el cual es aplicado a la planta multivariable presentada en la subsección 3.1 y discretizando con un tiempo de muestreo de 100 [ms].

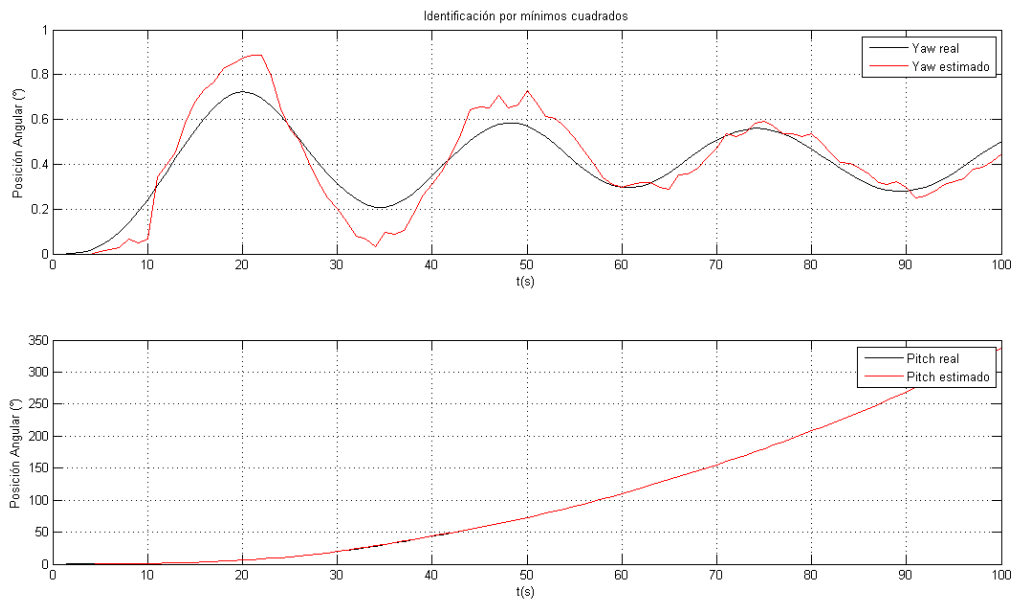


Figura 3.6 Identificación por mínimos cuadrados. a) Estimación salida Yaw. b) Estimación salida Pitch. Fuente: Autor.

La figura 3.6, muestra la respuesta de las salidas estimadas de la planta multivariable, donde se puede observar que el sistema de identificación no logra ser tan preciso como el presentado en las figuras 3.3 y 3.0 ya que las salidas estimadas no tienen un comportamiento idéntico a las salidas reales.

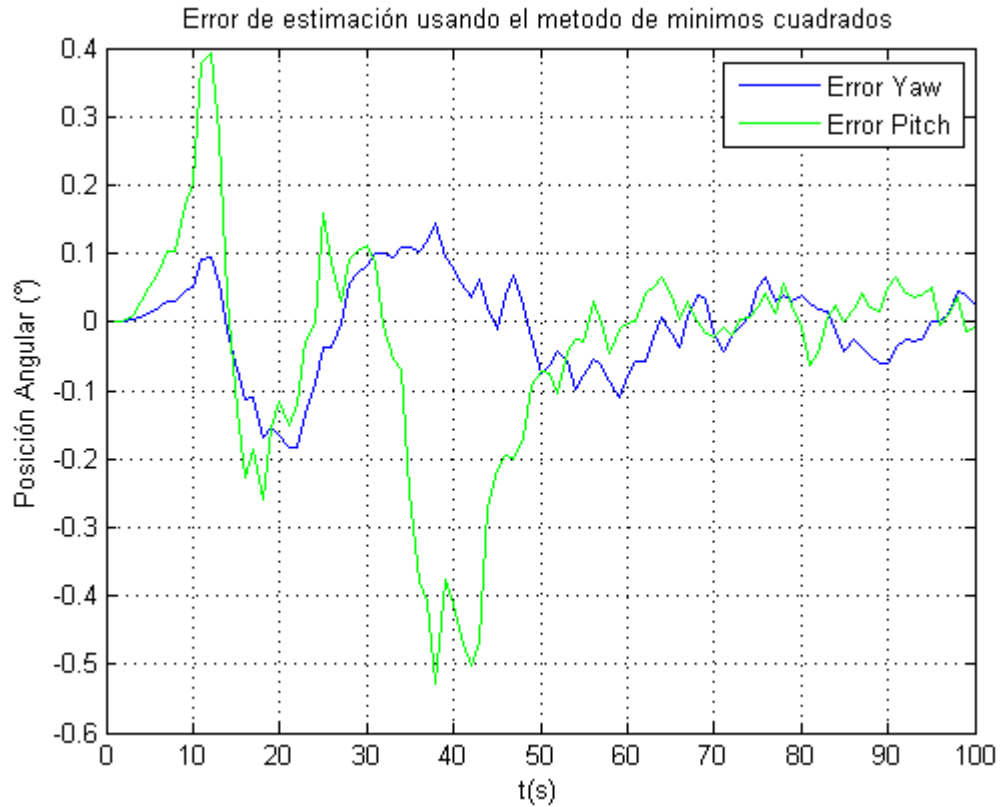


Figura 3.7 Error de estimación usando el método de mínimos cuadrados. Fuente: Autor.

Podemos observar de la figura 3.7, que los errores de estimación mediante este método incrementaron considerablemente teniendo en cuenta que los errores presentados en las figuras 3.1 y 3.4 eran casi cero, por lo que se acepta que el mejor rendimiento a la hora de estimar el sistema multivariable lo presentaron los métodos de identificación por subespacios.

Mediante este método de identificación encontramos un valor de $\theta(k)$ utilizando (2.45) y (2.46), el cual corresponde a los parámetros de la planta.

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} 0.9296 & -0.086 \\ -0.006 & 3.0342 \\ -0.026 & 0.3775 \\ 0.0062 & -2.034 \\ 0.0282 & 0.0264 \\ 0.0247 & 0.0144 \\ 0.0258 & 0.0480 \\ 0.0313 & 0.0187 \end{bmatrix}$$

Utilizando los valores de $\theta(k)$ y realizando una representación del sistema multivariable como se muestra en el Apéndice B, se obtiene el sistema en espacio de estados MIMO como se muestra en (2.0) y (2.1).

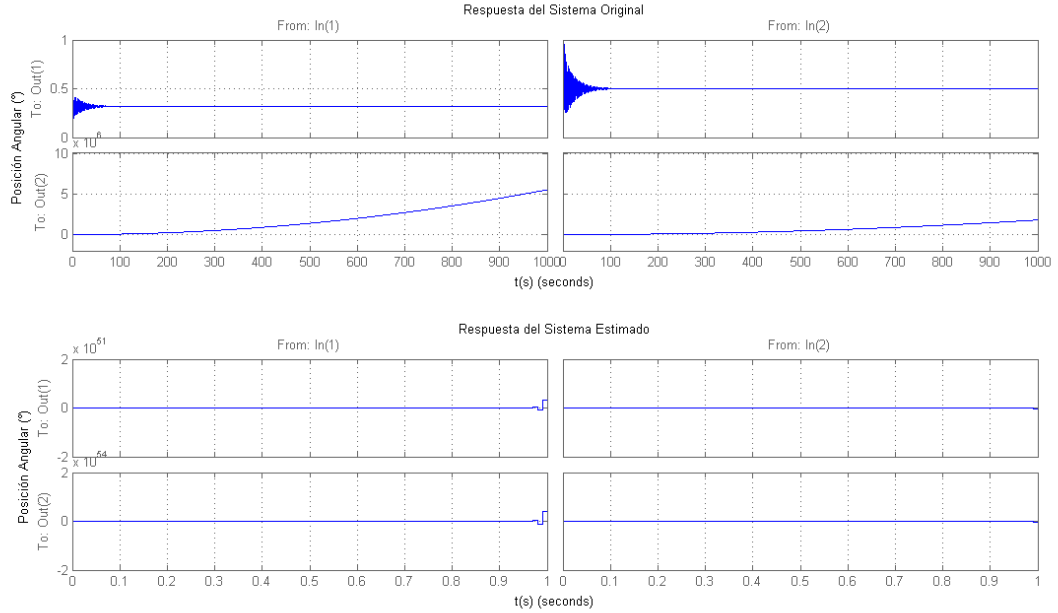


Figura 3.8 Comparación matriz de transferencia sistema original y sistema estimado utilizando mínimos cuadrados. a) Sistema original. b) Sistema estimado. Fuente: Autor.

De la figura 3.8 podemos visualizar la comparación del sistema original con el sistema estimado usando el método de mínimos cuadrados y representación en matriz de transferencia. Podemos decir que este método de estimación no presenta las mejores respuestas dado que posee errores de estimación bastante grandes los cuales se observan en la figura 3.5, y en la figura 3.6 nuevamente se evidencia que los valores obtenidos de $\theta(k)$ no poseen una dinámica cercana a la de la planta original dejando así un modelo no aceptable.

Por último se comparan las salidas estimadas entregadas por los métodos de estimación por subespacios diseñados por el autor, con salidas estimadas obtenidas por diferentes métodos aplicados al sistema multivariable del helicóptero 2DOF publicados en la revista *IEEE*. [14][15]

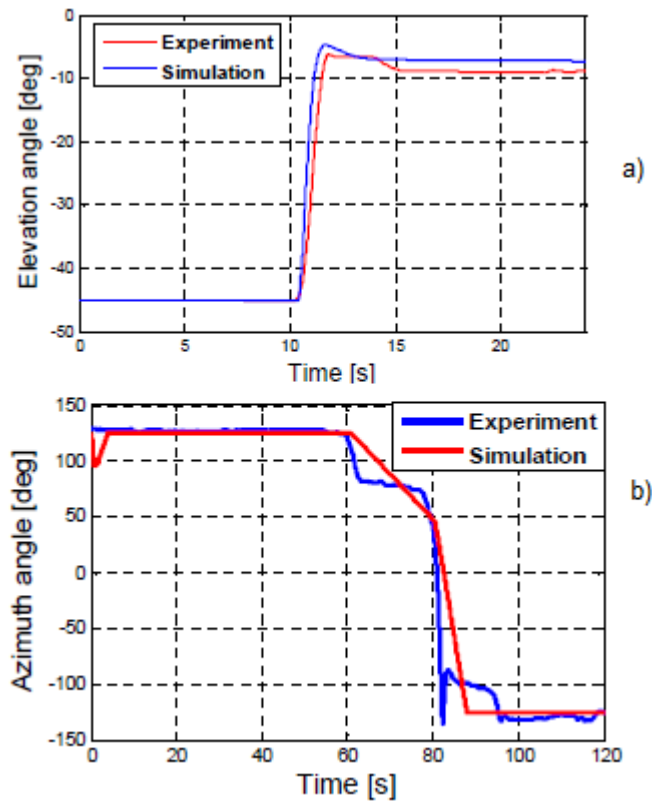


Figura 3.9 Identificación basada en algoritmos genéticos. a) Estimación salida Pitch. b) Estimación salida Yaw. [14]

En la figura 3.9 se observa el comportamiento de las salidas estimadas usando el método de algoritmos genéticos el cual también hace uso de los vectores de regresión lineal de salidas y entradas pasadas, también se observa que el modelo estimado representado por la línea azul se compara con un modelo simulado representado por la línea roja. Se puede observar que el error de estimación en ambas salidas es mucho mayor por este método si lo comparamos con las salidas estimadas por los métodos de subespacios mostradas en las Figuras 3.0 y 3.3.

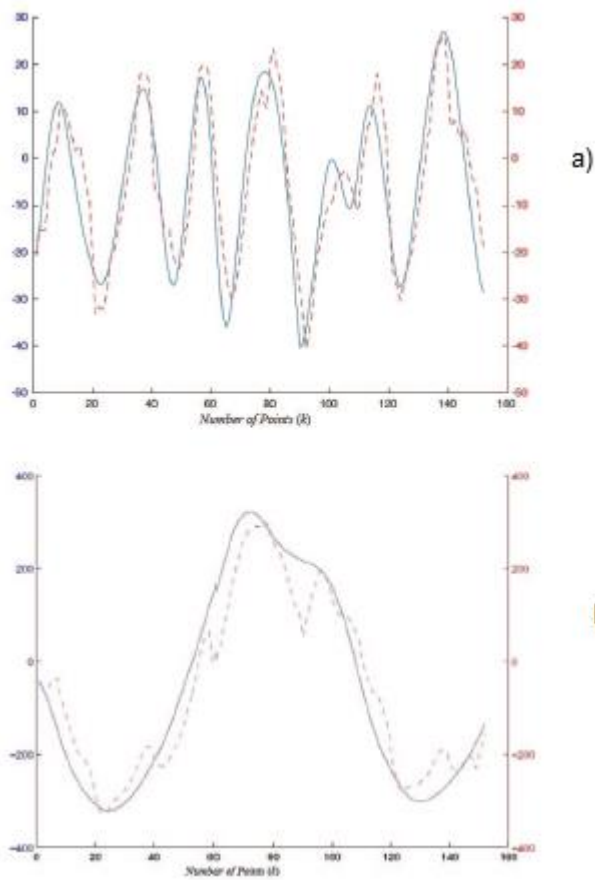


Figura 3.10 Identificación en línea basada en mínimos cuadrados. a) Estimación salida Pitch. b) Estimación salida Yaw. [15]

En la figura 3.10 se muestran las salidas estimadas del sistema multivariable haciendo uso del método de mínimos cuadrados, donde nuevamente en ambas salidas observamos errores de estimación mayores a los adquiridos por los métodos de identificación por subespacios diseñados por el autor y las respuestas mostradas en las figuras 3.0 y 3.3.

Conclusiones

- Los métodos de identificación por regresión lineal logran obtener una dinámica del modelo variante en el tiempo, la cual actualiza los parámetros del sistema a partir de datos anteriores de salidas y entradas.
- Para obtener un modelo estimado de forma adecuada, se requiere que los valores consignados en los vectores de regresión de entrada y salida de la planta se encuentren dentro de todo el rango de operación del sistema para poder conocer el comportamiento de la planta ante perturbaciones internas como externas.
- La representación del sistema estimado por los métodos de identificación por subespacios no es extensa, lo que influye en un corto tiempo de cálculo de las ganancias de un futuro controlador.
- La estimación por los métodos de identificación por subespacios logro mostrar las mejores respuestas estimadas obteniendo así errores de estimación muy pequeños, por lo que se acepta un mejor funcionamiento de estos dos métodos de estimación por subespacios realizados por el autor ante métodos más convencionales como mínimos cuadrados o estimación basada en algoritmos genéticos.
- La mejor estimación del sistema multivariable se logró obtener utilizando el método ORT dado que fue el método que posee el error de estimación más pequeño para ambas salidas, logrando así ser el método más eficiente para resolver el problema de estimación en este caso en específico.

Apéndice A

Códigos

Identificación Moesp

```
clear all
close all
clc
a=[0 1 0 0 0 0 0 0;-4.705882353 -0.088235294 0 0 1.358823529 0 -
14.70588235 0;0 0 0 1 0 0 0 0;0 -5 0 0 0 4.5 0 -50;0 0 0 0 -0.909090909 0
0 0;0 0 0 0 0 -1 0 0;0 0 0 0 0 0 0.25 -0.5 0;0 0 0 0 0.218181818 0 0 -0.5];
b=[0 0;0 0;0 0;0 0;1 0;0 0.8;0 -0.28;-0.35 0];
c=[1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0];
d=[0 0;0 0];
Hs=ss(a,b,c,d);
Hz=c2d(Hs,0.1);
n=8;      %Orden
p=2;      %Salidas
l=2;      %Entradas
%n:numero de datos
nd=100;
u=rand(nd,l);
%y se simula la salida
y=lsim(Hz,u);
%% MOESP

k=n+1;
N=nd/2-k;
%Matriz de Hankel para las salidas
kp=p*k;
Yp=zeros(kp,N);
yt=y';
for i=1:k
Yp((i-1)*p+1:i*p,:)=yt(:,i:i+N-1);
end
Y=Yp;

%Matriz de Hankel para las entradas
km=l*k;
Up=zeros(km,N);
ut=u';
for i=1:k
Up((i-1)*l+1:i*l,:)=ut(:,i:i+N-1);
end
U=Up;

%Descomposición QL
```

```

[Q,L]=qr([U;Y]');
Q=Q';
L=L';
L11 = L(1:km,1:km);
L21 = L(km+1:km+kp,1:km);
L22 = L(km+1:km+kp,km+1:km+kp);

[U,S,V] = svd(L22);
U1 = U(:,1:n);
U2 = U(:,n+1:(kp-n)+n);
Sigma=S(1:n,1:n);
Ok = U1*sqrtm(Sigma);
C = Ok(1:p,1:n);
A = (Ok(1:p*(k-1),1:n))\Ok(p+1:p*k,1:n);
Mk = (U2'*L21)/L11;
Lk = U2';
Mk_t=[];
Lk_t=[];
LkOk=[];
for i=1:k
Mk_t= [Mk_t; Mk(:,(i-1)*l+1:l*i)];
Lk_t= [Lk_t; Lk(:,(i-1)*p+1:p*i)];
if i~=k
    Lk_k= Lk(:,(i)*p+1:end);
    Ok_k= Ok(1:p*(k-i),:);
    LkOk=[LkOk; Lk_k*Ok_k];
else
    LkOk=[LkOk; zeros(kp-n,size(LkOk,2))];
end
end
DB=([Lk_t, LkOk])\Mk_t;
D = DB(1:p,:);
B = DB(p+1:size(DB,1),:);

sys=ss(A,B,C,D,-1);
Ye=lsim(sys,u);

%% Gráficas de Respuesta
figure(1)
subplot(211)
plot(y(:,1),'-r')
hold on
plot(Ye(:,1),'b')
grid on
xlabel('t(s)')
ylabel('Posición Angular (°)')
%plot([y(:,1) Ye(:,1)])
legend('Yaw','Yaw Estimado')
title('Identificación por el metodo MOESP')

subplot(212)
plot(y(:,2),'-r')

```

```

hold on
plot(Ye(:,2), 'b')
grid on
xlabel('t(s)')
ylabel('Posición Angular (°)')
%plot([y(:,2) Ye(:,2)])
legend('Pitch', 'Pitch estimado')

figure(2)
plot(y-Ye)
grid on
xlabel('t(s)')
ylabel('Posición Angular (°)')
legend('Error Yaw', 'Error Pitch')
title('Error de estimación usando el metodo MOESP')

figure(3)
subplot(211)
step(Hz)
title('Respuesta del Sistema Original')
subplot(212)
step(sys)
title('Respuesta del Sistema Estimado')

```

Identificación ORT

```

clear all
close all
clc

a=[0 1 0 0 0 0 0 0;-4.705882353 -0.088235294 0 0 1.358823529 0 -
14.70588235 0;0 0 0 1 0 0 0 0;0 -5 0 0 0 4.5 0 -50;0 0 0 0 -0.909090909 0
0 0;0 0 0 0 0 -1 0 0;0 0 0 0 0 0 0.25 -0.5 0;0 0 0 0 0.218181818 0 0 -0.5];
b=[0 0;0 0;0 0;0 0;1 0;0 0.8;0 -0.28;-0.35 0];
c=[1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0];
d=[0 0;0 0];
Hs=ss(a,b,c,d);
Hz=c2d(Hs,0.1);
n=8;      %Orden
p=2;      %Salidas
l=2;      %Entradas

%n:numero de datos
nd=100;
u=rand(nd,1);
%y se simula la salida
y=lsim(Hz,u);
%% ORT

k=n+1;
N=nd/2-k;

```

```

%Matriz de Hankel para las salidas
kp=p*k;
Yp=zeros(kp,N);
yt=y';
for i=1:k
Yp((i-1)*p+1:i*p,:)=yt(:,i:i+N-1);
end
Yf=zeros(kp,N);
Cont1=1;
for i=k+1:2*k
Yf((Cont1-1)*p+1:Cont1*p,:)=yt(:,i:i+N-1);
Cont1=Cont1+1;
end

%Matriz de Hankel para las entradas
km=1*k;
Up=zeros(km,N);
ut=u';
for i=1:k
Up((i-1)*1+1:i*1,:)=ut(:,i:i+N-1);
end
Uf=zeros(km,N);
Cont2=1;
for i=k+1:2*k
Uf((Cont2-1)*1+1:Cont2*1,:)=ut(:,i:i+N-1);
Cont2=Cont2+1;
end

%Descomposición QL
Y=[Yp;Yf];
U=[Uf;Up];
[Q,L]=qr([U;Y]');
Q=Q';
L=L';
L11 = L(1:km,1:km);
L41 = L(2*km+kp+1:2*km+2*kp,1:km);
L42 = L(2*km+kp+1:2*km+2*kp,km+1:2*km);

[U,S,V] = svd(L42);
U1 = U(:,1:n);
U2 = U(:,n+1:(kp-n)+n);
Sigma=S(1:n,1:n);
Ok = U1*sqrtm(Sigma);

C = Ok(1:p,:);
A = (Ok(1:p*(k-1),1:n)) \ Ok(p+1:p*k,1:n);
Mk = (U2'*L41)/L11;
Lk = U2';
Mk_t=[];
Lk_t=[];
LkOk=[];
for i=1:k
Mk_t = [Mk_t; Mk(:,(i-1)*1+1:1*i)];
Lk_t = [Lk_t; Lk(:,(i-1)*p+1:p*i)];

```

```

if i~=k
    Lk_k= Lk(:,(i)*p+1:end);
    Ok_k= Ok(1:p*(k-i),:);
    LkOk=[LkOk; Lk_k*Ok_k];
else
    LkOk=[LkOk; zeros(kp-n,size(LkOk,2))];
end
end
DB=([Lk_t, LkOk])\Mk_t;
D = DB(1:p,:);
B = DB(p+1:size(DB,1),:);

sys=ss(A,B,C,D,-1);
Ye=lsim(sys,u);

%% Gráficas de Respuesta
figure(1)
subplot(211)
plot(y(:,1),'-r')
hold on
plot(Ye(:,1),'b')
grid on
xlabel('t(s)')
ylabel('Posición Angular (°)')
%plot([y(:,1) Ye(:,1)])
legend('Yaw','Yaw Estimado')
title('Identificación por el metodo ORT')

subplot(212)
plot(y(:,2),'-r')
hold on
plot(Ye(:,2),'b')
grid on
xlabel('t(s)')
ylabel('Posición Angular (°)')
%plot([y(:,2) Ye(:,2)])
legend('Pitch','Pitch estimado')

figure(2)
plot(y-Ye)
grid on
xlabel('t(s)')
ylabel('Posición Angular (°)')
legend('Error Yaw','Error Pitch')
title('Error de estimación usando el metodo ORT')

figure(3)
subplot(211)
step(Hz)
title('Respuesta del Sistema Original')
subplot(212)
step(sys)
title('Respuesta del Sistema Estimado')

```

Apéndice B

Representación de sistemas multivariables

La representación de un sistema discreto multivariable con p salidas y l entradas con operador de retardo r , se puede representar de la forma. [7]

$$A(r^{-1})y[k] = B(r^{-1})u[k] \quad (4.0)$$

Donde A esta dado por

$$A(r^{-1}) = A_0 + A_1(r^{-1}) + A_2(r^{-2}) + \dots + A_n(r^{-n}) \quad (4.1)$$

Y B esta dado por

$$B(r^{-1}) = B_1(r^{-1}) + B_2(r^{-2}) + \dots + B_m(r^{-m}) \quad (4.2)$$

con $n \geq m$ y A_i es de dimension $p * p$, B_i de dimension $p * l$, ademas de las entradas $u[k]$ corresponden a un vector de dimension $l * 1$ y las salidas $y[k]$ corresponden a un vector de dimension $p * 1$ de la forma:

$$y[K] = \begin{bmatrix} y_1 [k] \\ y_2 [k] \\ \vdots \\ y_p [k] \end{bmatrix}, \quad u[K] = \begin{bmatrix} u_1 [k] \\ u_2 [k] \\ \vdots \\ u_l [k] \end{bmatrix}$$

Si $A_0 = I$ con I siendo la matriz identidad, se obtiene

$$[I + A_1(r^{-1}) + \dots + A_n(r^{-n})]y[k] = [B_1(r^{-1}) + \dots + B_m(r^{-m})]u[k] \quad (4.3)$$

$$y[k] = [B_1u[k-1] + \dots + B_mu[k-m] - A_1y[k-1] - \dots - A_ny[k-n]] \quad (4.4)$$

Donde A_i y B_i son de la forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \dots & a_{1p}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \dots & a_{2p}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}^i & a_{p2}^i & \dots & a_{pp}^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1l}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2l}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}^i & b_{p2}^i & \dots & b_{pl}^i \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

De las ecuaciones (4.5) y (4.3) se puede expresar la salida y_i en términos de las entradas y las salidas anteriores como:

$$\begin{aligned} y_i = & a_{i1}^1 y_1[k-1] + a_{i2}^1 y_2[k-1] + \dots + a_{ip}^1 y_p[k-1] + a_{i1}^2 y_1[k-2] \\ & + a_{i2}^2 y_2[k-2] + \dots + a_{ip}^2 y_p[k-2] + \dots + a_{i1}^n y_1[k-n] + \\ & a_{i2}^n y_2[k-n] + a_{ip}^n y_p[k-n] + b_{i1}^1 u_1[k-1] + b_{i2}^1 u_2[k-1] + \dots \\ & + b_{il}^1 u_l[k-1] + b_{i1}^2 u_1[k-2] + b_{i2}^2 u_2[k-2] + \dots + b_{il}^2 u_l[k-2] + \dots \\ & + b_{i1}^m u_1[k-m] + b_{i2}^m u_2[k-m] + \dots + b_{il}^m u_l[k-m] \end{aligned} \quad (4.6)$$

De (4.6) tenemos que el modelo DARMA representado en (4.0), se puede expresar de la forma:

$$y[k] = \theta^T [k-1] \phi[k-1]; \quad k \geq 0 \quad (4.7)$$

Donde tenemos que la matriz θ^T está conformada por los parámetros de las matrices $A(r^{-1})$ y $B(r^{-1})$, por lo tanto el tamaño de θ es de $(l * m + p * n) * p$, esto es:

$$\theta^T = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & \dots & b_{11}^m & \dots & b_{1l}^1 & \dots & b_{1l}^m & -a_{11}^1 & \dots & -a_{11}^n & \dots & -a_{1p}^1 & \dots & -a_{1p}^n \\ b_{21}^1 & \dots & b_{21}^m & \dots & b_{2l}^1 & \dots & b_{2l}^m & -a_{21}^1 & \dots & -a_{21}^n & \dots & -a_{2p}^1 & \dots & -a_{2p}^n \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1}^1 & \dots & b_{p1}^m & \dots & b_{pl}^1 & \dots & b_{pl}^m & -a_{p1}^1 & \dots & -a_{p1}^n & \dots & -a_{pp}^1 & \dots & -a_{pp}^n \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Se tiene que $\phi[k-1]$ es un vector de dimensión $(l * m + p * n) * 1$ y contiene los valores de las entradas y salidas anteriores.

$$\emptyset[k-1] = \begin{bmatrix} y_1[k-1] \\ \vdots \\ y_p[k-1] \\ \vdots \\ y_1[k-n] \\ \vdots \\ y_p[k-n] \\ \vdots \\ u_1[k-1] \\ \vdots \\ u_l[k-1] \\ \vdots \\ u_1[k-m] \\ \vdots \\ u_l[k-m] \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Bibliografía

- [1] D. Giraldo, M. Alvarez y C. Guarnizo, Control adaptativo por reubicación de polos, Scientia et Technica [en línea], 1(30), pp. 105-110, 2006.
- [2] E. Vallejo, Identificación paramétrica de sistemas dinámicos. Ingeniería y desarrollo [en línea], 1(2), pp. 10-22, 1997.
- [3] T. Mckelvy, Least squares and instrumental variable methods, Control systems, Robotics and instrumentation. Eloss publishers company limited, 2009, pp. 206-229.
- [4] T. Katayama, Subspace Methods for System Identification. Springer-Verlag London, 2005, pp. 389
- [5] G. P. Liu, Eigenstructure assignment for control system design 1ra ed. New York, Wiley, 1988, pp. 9-28.
- [6] D. Giraldo, E. Giraldo, Teoría control digital 1ra edición. Pereira, Universidad Tecnológica de Pereira, 2012, pp. 238.
- [7] K. Aström, B. Wittenmark. Adaptive Control Second edition. Mineloa, New York: Dover Publicationsinc, 2008, pp. 590.
- [8] Twin Rotor MIMO system, control experiments. Feddback instruments limited.
- [9] L. W. Jamaludin y N. A. Wahab. N4SID and MOESP subspace identification methods, in 9th international colloquium on Signal Processing and its Applications (CSPA), PP. 140-145, 2013.
- [10] T. Katayama. Subspace Methods for System Identification, en Communicati ons and Control Engineering, 2006.
- [11] M. Aziz y R. Mohd-Mokhtar. Performance Measure if Some Subspace-Based Methods for Closed-Loop System Identification, en 2nd International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation (CIMSIM), 2010, PP. 255-260.
- [12] Escobar Dávila, Luisa Fernanda. Montoya Giraldo, Oscar Danilo. Control híbrido del péndulo de Furuta. Pereira, Colombia. 2012. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de Ingeniero (a) Electricista.

- [13] Albarracín Ávila, Danna Lisseth. Control de sistemas multivariantes aplicado a un generador eólico conectado a un sistema de potencia. Pereira, Colombia. 2013. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de Ingeniero (a) Electricista.
- [14] N. Osmic, J. Velagic, S. Konjicija y A. Galijasevic. Genetic Algorithm Based Identification of a Nonlinear 2DOF Helicopter Model. 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10 IEEE, 2010, pp. 333-338.
- [15] O. Rocha y G. de Oliveira. Online Identification Based on Instrumental Variable Evolving Neuro-Fuzzy Model for Stochastic Dynamic Systems. 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2016, pp. 9-16.